

同步练习 P253 二. 1. 理学院 廖国勇 2016. 5. 31

设二阶微分方程的通解为 $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$, 求其方程

解: 特征方程为: $(r+1)(r-2)=0$, 即 $r^2-r-2=0$, 于是二阶微分

$$\text{方程为 } y'' - y' - 2y = 0$$

二. 2. 求微分方程 $x^2 y'' + 6xy' + 4y = 0$ 的形如 $y = x^k$ 的解.

解: 由 $y = x^k$, 则 $y' = kx^{k-1}$, $y'' = k(k-1)x^{k-2}$, 把 y, y', y''

$$\text{代入微分方程 } x^2 \cdot k(k-1)x^{k-2} + 6x \cdot kx^{k-1} + 4x^k = 0$$

$$\text{即 } [k(k-1) + 6k + 4] x^k = 0$$

$$\text{所以 } k(k-1) + 6k + 4 = k^2 + 5k + 4 = 0$$

$$k = -1 \text{ 或 } k = -4$$

于是, 微分方程形如 $y = x^k$ 的解为: $y = x^{-1}$ 或 $y = x^{-4}$

三. 证明题 验证 $y = \sin(x+C)$ 是微分方程 $y'^2 + y^2 - 1 = 0$ 的通解

证明: $y = \sin(x+C)$, $y' = \cos(x+C)$, 于是

$$y'^2 + y^2 - 1 = [\cos(x+C)]^2 + \sin^2(x+C) - 1 = 0$$

所以 $y = \sin(x+C)$ 是微分方程 $y'^2 + y^2 - 1 = 0$ 的通解.

注 1. 二. 1 题学过二阶线性微分方程后就很容易理解

2. 三中 $y = \cos(x+C)$ 也是其通解, 形式不一样, 本质

是一样的。 $y = \cos(x+C) = \sin(x+C + \frac{\pi}{2})$

C 为任意常数, $C + \frac{\pi}{2}$ 也为任意常数.